View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Saint Petersburg State University

Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Исследование операций и принятие решений в задачах оптимизации, управления и экономики

Чернышева Елена Алексеевна

Допустимые системы коалиций в играх с ограниченной кооперацией

Выпускная квалификационная работа

Научный руководитель:
к. ф.-м. н., доцент Н. И. Наумова

Рецензент:
д. ф.-м. н., профессор
И. В. Романовский

Санкт-Петербург
2017

Saint Petersburg State University
Applied Mathematics and Computer Science
Operation Research and Decision Making in Optimisation, Control and Economics Problems

Chernysheva Elena

Admissible collections of coalitions for games with restricted cooperation

Graduation Project

Scientific Supervisor:
Associate Professor N. I. Naumova

Reviewer:
Professor J. V. Romanovskiy

Saint Petersburg
2017

Оглавление

Введение

Задачи «справедливого» дележа в условиях кооперации были поставлены в 1944 г. в книге Джона фон Неймана и Оскара Моргенштерна [1]. В этой работе ставилась задача дележа между игроками из множества N фиксированной суммы дохода $v(N)$ при условии, что известна сумма дохода $v(S)$, которую может получить подмножество S множества N, если все его элементы будут действовать сообща. Любое подмножество S множества N называется коалицией. Таким образом, в этой постановке задачи коалицией является не реально действующее множество игроков, а гипотетическое. В рассматриваемой работе предполагалось, что сумма дохода $v(S)$ задана для любого подмножества S множества N. Однако во многих реальных задачах не все коалиции могут быть реализуемы, и в настоящее время в теории кооперативных игр в основном рассматриваются задачи с ограниченной кооперацией.

В связи с этим возникает надежда получать более «естественное» решение задач о «справедливом» дележе при небольшом наборе коалиций. Кроме того, величины $v(S)$ в ряде задач могут рассматриваться не как величины, отражающие силу коалиций, а как величины, соответствующие потребностям этих коалиций.

Наталья Наумова в [2] рассматривала вопрос возможности дележа суммарного, бесконечно делимого фиксированного ресурса, удовлетворяющего условию пропорциональности как между всеми коалициями, так и только между непересекающимися коалициями из фиксированного набора коалиций, называемых допустимыми. В случае, когда набор коалиций является набором только всех одноточечных множеств, пропорциональное распределение ресурса можно также получить и как решение задачи максимизации взвешенной энтропии, и как решение задач о лексикографически максиминном и лексикографически минимаксном векторах. Если набор коалиций не является разбиением множества N, то эти задачи не являются эквивалентными. Оказывается, что пропорциональное распределение ресурса между всеми допустимыми коалициями при любых положительных v возможно только если для каждой коалиции существует элемент, принадлежащий только этой коалиции (его можно назвать фанатиком этой коалиции). Аналогично случаю одноточечных допустимых коалиций, если набор всех рассматриваемых коалиций — разбиение множества N, то все эти методы дают одинаковый результат. Кроме того, обобщенное энтропийное решение и лексикографически максиминное решение всегда содержатся в пропорциональном только если набор допустимых коалиций — разбиение множества N.

Поэтому в работе [2] условие пропорциональности ослабляется и требуется только пропорциональность для непересекающихся допустимых коалиций. Такие распределения ресурса называются слабо пропорциональными. Там же было описано необходимое и достаточное условие на набор допустимых коалиций для существования слабо пропорционального решения при любых положительных v. Поскольку обобщенное энтропийное и лексикографически максиминное решения всегда существуют, возникает вопрос о возможности их использования в качестве селекторов слабо пропорционального решения. В [3] были получены необходимое и достаточное условие на набор допустимых коалиций для слабой пропорциональности обобщенного энтропийного решения и необходимое и достаточное условие на набор допустимых коалиций для слабой пропорциональности лексикографического максиминного решения. Необходимое и достаточное условие на систему коалиций для совпадения обобщенного энтропийного решения и обобщенного максиминного решения неизвестно. В [3] было описано только достаточное условие.

В данной работе для задач описанного выше типа рассматривается лексикографически минимаксное решение. Получены условия его пропорциональности и слабой пропорциональности, которые не совсем аналогичны известным условиям для лексикографически максиминного решения. Так, если для набора допустимых коалиций пропорциональное решение всегда существует, то лексикографически минимаксное решение является пропорциональным. Для включения лексикографически максиминного решения в слабо пропорциональное в [3] и [4] были получены эквивалентные условия на набор допустимых коалиций. Однако аналоги этих условий для минимаксного случая не эквивалентны, только один из аналогов из [4] является необходимым и достаточным условием слабой пропорциональности лексикографически минимаксного решения.

В работе приводятся примеры, когда условия для слабой пропорциональности для минимаксного и максиминного решения не совпадают, описываются все наборы коалиций, удовлетворяющие полученному условию при $|N| \leqslant 6$. Кроме того, получено достаточное условие совпадения обобщенного энтропийного решения, обобщенного минимаксного решения и их слабой пропорциональности (это условие совпадает с достаточным условием для максиминного решения).

Глава 1

Основные определения

Игрой с ограниченной кооперацией называется четверка вида $(N, \mathcal{A}, c, v)$, где N — конечный набор агентов, $\mathcal{A}$ — некоторый набор непустых подмножеств множества N (набор коалиций агентов), c — положительное действительное число (количество ресурсов, которые должны быть разделены между агентами), $v = \{v(T)\}_{T\in\mathcal{A}}$, где $v(T) > 0$ — требования коалиции T. Предполагаем, что $\mathcal{A}$ покрывает N и $N \notin \mathcal{A}$.

Замечание 1. *В классической кооперативной игре считается, что $\mathcal{A} = 2^N \setminus \{N\}$, $v(\varnothing) = 0$, $c = v(N)$.*

В отличие от случая классической кооперативной игры, *множеством дележей игры* $(N, \mathcal{A}, c, v)$ будем называть множество вида

$$\{\{y_i\}_{i\in N} : \ y_i \geqslant 0, \ \sum_{i\in N} y_i = c\}.$$

Решением F называется отображение, которое любой игре $(N, \mathcal{A}, c, v)$ сопоставляет подмножество ее множества дележей.
Обозначим $y(S) = \sum\limits_{i\in S} y_i$.

Определение 1.1. Дележ $y = \{y_i\}_{i\in N}$ принадлежит *пропорциональному решению игры* $(N, \mathcal{A}, c, v)$, если существует такое $\alpha > 0$, что $y(T) = \alpha v(T)$ для всех $T \in \mathcal{A}$.

Определение 1.2. Дележ $y = \{y_i\}_{i\in N}$ принадлежит *слабо пропорциональному решению игры* $(N, \mathcal{A}, c, v)$, если $y(S)/v(S) = y(Q)/v(Q)$ для всех таких $S, Q \in \mathcal{A}$, что $S \cap Q = \varnothing$.

Определение 1.3. Дележ y принадлежит *лексикографически максиминному решению игры* $(N, \mathcal{A}, c, v)$, если $\theta(y) \geqslant_{lex} \theta(z)$ для любого дележа z

игры $(N,\mathcal{A},c,v)$, где $\theta(x)=(u_{T_1}(x),\dots,u_{T_{|\mathcal{A}|}}(x))$, $u_T(x)=\frac{x(T)}{v(T)}$ и элементы $\mathcal{A}$ пронумерованы так, что $u_{T_i}(x)\leqslant u_{T_{i+1}}(x)$.

Определение 1.4. Дележ y принадлежит *лексикографически минимаксному решению игры* $(N,\mathcal{A},c,v)$, если $\bar\theta(y)\leqslant_{lex}\bar\theta(z)$ для $\forall$ дележа z игры $(N,\mathcal{A},c,v)$, где $\bar\theta(x)=(u_{T_1}(x),\dots,u_{T_{|\mathcal{A}|}}(x))$, $u_T(x)=\frac{x(T)}{v(T)}$ и элементы $\mathcal{A}$ пронумерованы так, что $u_{T_i}(x)\geqslant u_{T_{i+1}}(x)$.

Для любых $\mathcal{A},\ c>0,\ v:\ v(T)>0$ лексикографически максиминное и лексикографически минимаксное решения игры $(N,\mathcal{A},c,v)$ непусты и однозначно определяют общие суммы $y(T)$ для всех $T\in\mathcal{A}$, так как функции u_T являются непрерывными линейными функциями. Фактически этот результат был получен Шмайдлером в [5], а первым формально это обобщил Вилков в [6].

Пусть $\mathcal{G}$ — класс таких строго возрастающих непрерывных функций g, определенных на $(0,+\infty)$, что $g(1)=0,\ \lim\limits_{x\to 0}\int\limits_a^x g(t)dt<+\infty$ для $\forall\ a>0$.

Определение 1.5. Пусть $g\in\mathcal{G},\ f(z)=\sum\limits_{Q\in\mathcal{A}}\int\limits_{v(Q)}^{z(Q)} g(t/v(Q))dt$, вектор $y=\{y_i\}_{i\in N}$ принадлежит *g–решению игры* $(N,\mathcal{A},c,v)$, если y минимизирует f на множестве дележей игры $(N,\mathcal{A},c,v)$.

Примеры

1. Если $g(t)=\ln t$, то $\int\limits_{v(S)}^{z(S)} g(t/v(S))dt=z(S)[\ln(z(S)/v(S))-1]+v(S)$ и g–решение является *взвешенным энтропийным решением.* ([2], [3], [4]).

2. Если $g(t)=t^q-1$, где $q>0$, то получаем задачу минимизации для $\sum\limits_{S\in\mathcal{A}} z(S)[\frac{z(S)^q}{(q+1)v(S)^q}-1]$, которая была рассмотрена для $\mathcal{A}=2^N\setminus\{\varnothing\}$ в работе Яновской [7].

Взвешенное энтропийное решение как мера близости точек рассматривалась еще в работе Брегмана и Романовского [8]. Обзор дальнейших результатов в этом направлении см. в [9].

Глава 2

Известные результаты

Теорема 2.1. (Теорема 1 из [2])
Пропорциональное решение игры $(N, \mathcal{A}, c, v)$ *непусто для всех* $c > 0$*, всех таких* v*, что* $v(T) > 0$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{A}$ *является минимальным покрытием* N*.*

Теорема 2.2. (Предложение 1 из [2])
Лексикографически максиминное решение игры $(N, \mathcal{A}, c, v)$ *содержится в пропорциональном решении игры* $(N, \mathcal{A}, c, v)$ *для всех* $c > 0$*, всех таких* v*, что* $v(T) > 0$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{A}$ *является разбиением* N*.*

Множество коалиций $\mathcal{A}$ порождает неориентированный граф $G = G(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — множество вершин и $K, L \in \mathcal{A}$ смежны, если $K \cap L = \varnothing$.

Теорема 2.3. (Теорема 3 из [2])
Слабо пропорциональное решение игры $(N, \mathcal{A}, c, v)$ *непусто для любых* $c > 0$*,* $v:\ v(T) > 0$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{A}$ *удовлетворяет следующему условию*
C0. Если из каждой компоненты связности графа $G(\mathcal{A})$ *убрать по одной вершине, то остальные элементы* $\mathcal{A}$ *не покроют* N*.*

Примеры

1. Если $\mathcal{A}$ является минимальным покрытием N, то условие C0 выполняется.

2. Пусть $|N| = 4$, $\mathcal{A} = \{\{1,2\},\ \{3,4\},\ \{1,3\},\ \{2,4\}\}$.
   Тогда граф $G(\mathcal{A})$ имеет следующие компоненты связности:
$$\mathcal{B}^1 = \{\{1,2\},\ \{3,4\}\},\ \mathcal{B}^2 = \{\{1,3\},\ \{2,4\}\}$$

Легко проверить, что такая система коалиций удовлетворяет условию C0.

3. Пусть $|N| = 4$, $\mathcal{A}$ состоит из всех двухэлементных коалиций:
   $\mathcal{A} = \{\{1,2\},\ \{1,3\},\ \{1,4\},\ \{2,3\},\ \{2,4\},\ \{3,4\}\}$
   Тогда граф $G(\mathcal{A})$ имеет следующие компоненты связности:

$$\mathcal{B}^1 = \{\{1,2\},\ \{3,4\}\},\ \mathcal{B}^2 = \{\{1,3\},\ \{2,4\}\},\ \mathcal{B}^3 = \{\{1,4\},\ \{2,3\}\}$$

   Из компоненты $\mathcal{B}^1$ уберем коалицию $\{1,2\}$, из компоненты $\mathcal{B}^2$ уберем коалицию $\{1,3\}$, из компоненты $\mathcal{B}^3$ уберем коалицию $\{2,3\}$. Оставшиеся коалиции $\{\{3,4\},\ \{2,4\},\ \{1,4\}\}$ покрывают N.
   Таким образом, для данного набора коалиций условие C0 не выполняется.

В статье [10] для $|N| \leqslant 6$ были перечислены все возможные системы коалиций, удовлетвряющие условию C0. Более подробно рассмотрим их в Главе 5.
Для $i \in N$ обозначим $\mathcal{A}_i = \{T \in \mathcal{A} : i \in T\}$.

Определение 2.1. Система коалиций $\mathcal{A}$ *слабо смешана в* N, если $\mathcal{A} = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \mathcal{B}^i$, где

- C1. Каждое $\mathcal{B}^i$ содержится в разбиении N.
- C2. $Q \in \mathcal{B}^i,\ S \in \mathcal{B}^j,\ i \neq j\ \Rightarrow\ Q \cap S \neq \varnothing$.
- C3. Для любых $i \in N,\ Q \in \mathcal{A}_i,\ S \in \mathcal{A}$ если $Q \cap S = \varnothing$, то существует такой $j \in N$, что $\mathcal{A}_j \supset \mathcal{A}_i \cup \{S\} \setminus \{Q\}$.

Примеры

1. Пусть $|N| = 4$, $\mathcal{A} = \{\{1,2\},\ \{3,4\},\ \{1,3\},\ \{2,4\}\}$.

   Легко проверить, что такая система коалиций является слабо смешанной.

   $$\mathcal{B}^1 = \{\{1,2\},\ \{3,4\}\},\ \mathcal{B}^2 = \{\{1,3\},\ \{2,4\}\}$$

   Условия C1 – C3 выполняются.

2. Пусть $|N| = 5$, $\mathcal{A} = \{\{1,2\},\ \{3,4\},\ \{1,5\}\}$.

   $\mathcal{A}$ нельзя представить в виде объединения $\mathcal{B}^i$, которое будет удовлетворять условиям C1, C2.

   $\mathcal{A}$ не является слабо смешанной.

3. Пусть $|N| = 4$, $\mathcal{A} = \{\{1,2\},\ \{3,4\},\ \{1,3\},\ \{1,4\}\}$.

   $$\mathcal{B}^1 = \{\{1,2\},\ \{3,4\}\},\ \mathcal{B}^2 = \{\{1,3\}\},\ \mathcal{B}^3 = \{\{1,4\}\}$$

   Условия C1, C2 выполняются. Допустим, что выполняется C3.

   $\mathcal{A}_1 = \{\{1,2\},\ \{1,3\},\ \{1,4\}\}$, возьмем $Q = \{1,2\}$, $S = \{3,4\}$.

   Тогда существует такой $j \in N$, что

   $$\mathcal{A}_j \supset \mathcal{A}_i \cup \{S\} \setminus \{Q\} = \{\{1,3\},\ \{1,4\},\ \{3,4\}\}.$$

   Но такое включение невозможно, значит C3 не выполняется.

   $\mathcal{A}$ не является слабо смешанной.

Замечание 2. (Лемма 1 из [4])
C1 *и* C2 *следуют из* C3.

Поэтому определение 2.1 эквивалентно следующему определению:

Определение 2.2. Система коалиций $\mathcal{A}$ *слабо смешана в* N*,* если для любых $i \in N,\ Q \in \mathcal{A}_i,\ S \in \mathcal{A}$ если $Q \cap S = \varnothing$, то существует такой $j \in N$, что $\mathcal{A}_j \supset \mathcal{A}_i \cup \{S\} \setminus \{Q\}$.

Теорема 2.4. (Замечание 2 из [3])

Если $\mathcal{A}$ слабо смешана, то выполняется C0.

Теорема 2.5. (Теорема 2 из [3])

Лексикографически максиминное решение игры $(N, \mathcal{A}, c, v)$ содержится в слабо пропорциональном решении игры $(N, \mathcal{A}, c, v)$ для всех $c > 0$, всех $v: \ v(T) > 0$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ слабо смешана в N.

Свойства g-решений

Свойство 1. (Свойство 2 из [3])

Для всех $g \in \mathcal{G}$ $f(z) = \sum\limits_{Q \in \mathcal{A}} \int\limits_{v(Q)}^{z(Q)} g(t/v(Q))dt$ является выпуклой функцией от z и для всех $\mathcal{A}$, $c > 0$, $v: \ v(T) > 0$ g-решение игры $(N, \mathcal{A}, c, v)$ однозначно определяет общие суммы $y(T)$ для всех $T \in \mathcal{A}$.

Свойство 2. (Свойство 3, Свойство 4 из [3])

Пусть $g \in \mathcal{G}$. Дележ x принадлежит g-решению игры $(N, \mathcal{A}, c, v)$ тогда и только тогда, когда $x_i > 0$ влечет

$$\sum_{T \in \mathcal{A}_i} g(x(T)/v(T)) \leqslant \sum_{S \in \mathcal{A}_j} g(x(S)/v(S)) \text{ для } \forall j \in N.$$

Теорема 2.6. (Предложение 3 из [3])

Для любого $g \in \mathcal{G}$, g–решение игры $(N, \mathcal{A}, c, v)$ содержится в пропорциональном решении игры $(N, \mathcal{A}, c, v)$ для всех $c > 0$, всех $v: \ v(T) > 0$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ является разбиением N.

Определение 2.3. Система коалиций $\mathcal{A}$ *смешана в N*, если
$\mathcal{A} = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \mathcal{B}^i$, где

C1. Каждое $\mathcal{B}^i$ содержится в разбиении N.

C2. $Q \in \mathcal{B}^i, \ S \in \mathcal{B}^j, \ i \neq j \ \Rightarrow \ Q \cap S \neq \varnothing.$

C3. Для любых $i \in N,\ Q \in \mathcal{A}_i,\ S \in \mathcal{A}$ если $Q \cap S = \varnothing$, то существует такой $j \in N$, что $\mathcal{A}_j = \mathcal{A}_i \cup \{S\} \setminus \{Q\}$.

Теорема 2.7. (Теорема 3 из [3])
Пусть $g \in \mathcal{G}$. g–решение игры $(N, \mathcal{A}, c, v)$ содержится в слабо пропорциональном решении игры $(N, \mathcal{A}, c, v)$ для всех $c > 0$, всех $v:\ v(T) > 0$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ смешана в N.

Определение 2.4. Система коалиций $\mathcal{A}$ *сильно смешана в N*, если
$\mathcal{A} = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \mathcal{B}^i$, где

1. $k \geqslant 2$,
2. каждое $\mathcal{B}^i$ содержится в разбиении N,
3. $Q \in \mathcal{B}^i,\ S \in \mathcal{B}^j,\ i \neq j\ \Rightarrow\ Q \cap S \neq \varnothing$,
4. $|\mathcal{A}_i| = m$ для всех $i \in N$, где $2 \leqslant m \leqslant k$,
5. если взять любые m систем $\mathcal{B}^{j_1}, \ldots, \mathcal{B}^{j_m}$, то для каждого набора $\{S_{j_t}\}_{t=1}^{m}$, где $S_{j_t} \in \mathcal{B}^{j_t}$, выполняется $\bigcap\limits_{t=1}^{m} S_{j_t} \neq \varnothing$.

Примеры

1. Пусть $|N| = 4$, $\mathcal{A} = \{\{1,2\},\ \{3,4\},\ \{1,3\},\ \{2,4\}\}$.
   Легко проверить, что такая система коалиций является сильно смешанной.
   $$\mathcal{B}^1 = \{\{1,2\},\ \{3,4\}\},\ \mathcal{B}^2 = \{\{1,3\},\ \{2,4\}\}$$
   Условия 1–5 выполняются.

2. $N = \{1, 2, \ldots, 12\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}^1 \cup \mathcal{B}^2 \cup \mathcal{B}^3$, где
   $\mathcal{B}^1 = \{\{1,2,3,4\}, \{5,6,7,8\}\}$,
   $\mathcal{B}^2 = \{\{3,5,9,10\}, \{4,6,,11,12\}\}$,

$\mathcal{B}^3 = \{\{1,7,9,11\},\{2,8,10,12\}\}$.

Легко проверить, что такая система коалиций является сильно смешанной.

3. Пусть $|N| = 5$, $\mathcal{A} = \{\{1,2\},\ \{3,4\},\ \{1,5\}\}$.

   $\mathcal{A}$ нельзя представить в виде объединения $\mathcal{B}^i$, которое будет удовлетворять условиям 1 – 3.

   $\mathcal{A}$ не является сильно смешанной.

4. Пусть $|N| = 5$, $\mathcal{A} = \{\{1,2\},\ \{3,4,5\};\ \{1,3\},\ \{2,4\}\}$.

$$\mathcal{B}^1 = \{\{1,2\},\ \{3,4,5\}\},\ \mathcal{B}^2 = \{\{1,3\},\ \{2,4\}\}$$

   Условия 1 – 3 выполняются, но условие 4 не выполняется для $i = 5$.

   $\mathcal{A}$ не является сильно смешанной.

5. Пусть $|N| = 4$, $\mathcal{A}$ состоит из всех двухэлементных коалиций:

   $\mathcal{A} = \{\{1,2\},\ \{1,3\},\ \{1,4\},\ \{2,3\},\ \{2,4\},\ \{3,4\}\}$.

$$\mathcal{B}^1 = \{\{1,2\},\ \{3,4\}\},\ \mathcal{B}^2 = \{\{1,3\},\ \{2,4\}\},\ \mathcal{B}^3 = \{\{1,4\},\ \{2,3\}\}.$$

   Условия 1 – 4 выполняются, но условие 5 не выполняется для $S_{j_1} = \{1,2\}$, $S_{j_2} = \{1,3\}$, $S_{j_3} = \{2,3\}$.

   $\mathcal{A}$ не является сильно смешанной.

Замечание 3. (Замечание 4 из [3])

Если $\mathcal{A}$ сильно смешана в N, то $\mathcal{A}$ смешана в N.

Теорема 2.8. (Теорема 5 из [3])

Пусть $\mathcal{A}$ сильно смешана в N. Тогда лексикографически максиминное решение игры $(N, \mathcal{A}, c, v)$ совпадает с g-решением игры $(N, \mathcal{A}, c, v)$ для всех $g \in \mathcal{G},\ c > 0,\ v$ и содержится в слабо пропорциональном решении.

Утверждение 2.1. *Если в графе $G(\mathcal{A})$ две компоненты связности и каждая из них является разбиением N, то для всех $g \in \mathcal{G}$, $c > 0$, v лексикографически максиминное решение игры $(N, \mathcal{A}, c, v)$ совпадает с g-решением игры $(N, \mathcal{A}, c, v)$ и со слабо пропорциональным решением игры $(N, \mathcal{A}, c, v)$.*

Глава 3

Лексикографически минимаксное решение

В данной главе описываются полученные автором результаты об условиях на набор коалиций $\mathcal{A}$, гарантирующих пропорциональность и слабую пропорциональность лексикографически минимаксного решения игры $(N, \mathcal{A}, c, v)$.

3.1. Условия пропорциональности

Лемма 3.1. *Пусть* $x = \{x_i\}_{i \in N}$, $y = \{y_i\}_{i \in N}$ *— дележи игры* $(N, \mathcal{A}, c, v)$, *для которых выполняются следующие условия:*

1. *существует такое* $P \in \mathcal{A}$, *что* $y(P) < x(P)$ *и из условия* $y(T) > x(T)$ *следует* $\frac{y(P)}{v(P)} > \frac{y(T)}{v(T)}$;
2. $\frac{x(T_1)}{v(T_1)} > \frac{x(T_2)}{v(T_2)} \quad \Rightarrow \quad \frac{y(T_1)}{v(T_1)} > \frac{y(T_2)}{v(T_2)}$.

Тогда $\bar{\theta}(y) <_{lex} \bar{\theta}(x)$.

Доказательство. Перенумеруем коалиции в $\bar{\theta}(x)$ так, чтобы в случае равенства сначала шли коалиции, не изменившиеся при переходе от x к y, а в случае равенства коалиций, изменившихся при переходе от x к y, сначала шли коалиции, которые в векторе $\bar{\theta}(y)$ стоят левее.

Пусть S–минимальная по номеру в $\bar{\theta}(x)$, для которой $x(S) \neq y(S)$ (такие S существуют, например, P). Пусть $\frac{x(S)}{v(S)} = \bar{\theta}_k(x)$

Покажем, что $y(S) < x(S)$.

Допустим, что $y(S) > x(S)$. Тогда

$$\frac{x(P)}{v(P)} > \frac{y(P)}{v(P)} > \frac{y(S)}{v(S)} > \frac{x(S)}{v(S)},$$

то есть номер P строго меньше номера S, противоречие.

Докажем, что $\bar{\theta}_k(y) = \frac{y(S)}{v(S)}$, то есть S в векторе $\bar{\theta}(y)$ стоит на том же месте, что и в векторе $\bar{\theta}(x)$.

Из условия 2 и перенумерации коалиций в случае равенства следует, что все коалиции, которые в векторе $\bar{\theta}(x)$ стоят левее коалиции S, в векторе $\bar{\theta}(y)$ тоже должны стоять левее коалиции S.

Для любой коалиции Q, которая в векторе $\bar{\theta}(x)$ стоит правее коалиции S, выполняется $\frac{x(S)}{v(S)} \geqslant \frac{x(Q)}{v(Q)}$. Если неравенство строгое, то из условия 2 в векторе $\bar{\theta}(y)$ коалиция Q тоже стоит правее коалиции S. Если неравенство выполняется как равенство, то из перенумерации коалиций в случае равенства следует, что коалиция S стоит левее коалиции Q.

Таким образом, в векторе $\bar{\theta}(y)$ левее коалиции S находятся те же коалиции, что и в векторе $\bar{\theta}(x)$.

Значит, $\bar{\theta}_k(y) = \frac{y(S)}{v(S)}$ и $\bar{\theta}(y) <_{lex} \bar{\theta}(x)$.

□

Теорема 3.1. *Лексикографически минимаксное решение игры* $(N, \mathcal{A}, c, v)$ *содержится в пропорциональном решении игры* $(N, \mathcal{A}, c, v)$ *для всех* $c > 0$, $v : \ v(T) > 0$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{A}$ *является минимальным покрытием* N.

Доказательство. Если лексикографически минимаксное решение игры $(N, \mathcal{A}, c, v)$ всегда содержится в пропорциональном решении игры $(N, \mathcal{A}, c, v)$, то пропорциональное решение всегда непусто и по Теореме 2.1 набор коалиций $\mathcal{A}$ является минимальным покрытием N.

Наоборот, пусть $\mathcal{A}$ — минимальное покрытие N, x–лексикографически минимаксное решение игры $(N, \mathcal{A}, c, v)$. Покажем, что x является пропорциональным решением.

Пусть x не является пропорциональным, то есть существуют такие $S, Q \in$

$\mathcal{A}$, что $\frac{x(Q)}{v(Q)} < \frac{x(S)}{v(S)}$.

Тогда существует $i_0 \in S$, для которого $x_{i_0} > 0$.

Рассмотрим $j_0 \in Q \setminus \Big(\bigcup\limits_{T \in \mathcal{A} \setminus \{Q\}} T \Big)$. Такой j_0 существует, так как для любого $P \in \mathcal{A}$ верно, что $\mathcal{A} \setminus \{P\}$ не покрывает N.

Рассмотрим $\delta :\ 0 < \delta < x_{i_0}$, для которого выполняется

$$\frac{x(T)}{v(T)} < \frac{x(P)}{v(P)} \quad \Rightarrow \quad \frac{x(T)+\delta}{v(T)} < \frac{x(P)-\delta}{v(P)} \quad \text{для } \forall\, T, P \in \mathcal{A}.$$

Положим $y = \{y_i\}_{i \in N}$:

$y_{i_0} = x_{i_0} - \delta$,

$y_{j_0} = x_{j_0} + \delta$,

$y_i = x_i$ в остальных случаях.

Тогда $y(S) < x(S)$, а $y(T) > x(T)$ только при $T = Q$ и выполняется

$$\frac{y(Q)}{v(Q)} < \frac{y(S)}{v(S)}.$$

При этом

$$\text{если} \quad \frac{x(T)}{v(T)} < \frac{x(P)}{v(P)}, \quad \text{то} \quad \frac{y(T)}{v(T)} < \frac{y(P)}{v(P)}.$$

Тогда по Лемме 3.1 дележ x не является лексикографически минимаксным решением, противоречие. □

3.2. Условия слабой пропорциональности

Определение 3.1. Совокупность коалиций $\mathcal{A}$ *слабо перемешана в N*, если для любых $i \in N,\ Q \in \mathcal{A}_i,\ S \in \mathcal{A}$, таких, что $Q \cap S = \varnothing$, существует $j \in N$, такой, что $\mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}_i \cup \{S\} \setminus \{Q\}$.

Утверждение 3.1. *Если $\mathcal{A}$ слабо перемешана, то выполняется C0.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A} = \bigcup\limits_{t=1}^{k} \mathcal{B}^t$, где $\mathcal{B}^t$ – компоненты связности $G(\mathcal{A})$. Можно считать, что среди $\mathcal{B}^t$ нет одноэлементных.

Допустим, что условие C0 не выполняется. Тогда существует такой набор коалиций $\mathcal{S} = \{S_t\}_{t=1}^k$, $S_t \in \mathcal{B}^t$, что элементы $\mathcal{A} \setminus \mathcal{S}$ покрывают N.

Обозначим $\mathcal{C} = \mathcal{A} \setminus \mathcal{S}$, для $i \in N$ обозначим $\mathcal{C}_i = \{T \in \mathcal{C} : i \in T\}$.

Рассмотрим такой $i_0 \in N$, что $|\mathcal{C}_{i_0}| \leqslant |\mathcal{C}_i|$ для всех $i \in N$.

Элементы $\mathcal{A} \setminus \mathcal{S}$ покрывают N, следовательно $|\mathcal{C}_{i_0}| > 0$, то есть существует коалиция $Q_0 \in \mathcal{C}_{i_0}$. Коалиция Q_0 принадлежит некоторой компоненте связности $\mathcal{B}^{t_0}$, где $t_0 \in 1 : k$. В этой же компоненте связности содержится некоторое $S_{t_0} \in \mathcal{S}$.

Рассмотрим в компоненте связности $\mathcal{B}^{t_0}$ графа $G(\mathcal{A})$ путь от Q_0 до S_{t_0}, то есть последовательность коалиций $\{Q_0,\ Q_1, \ldots,\ Q_m,\ S_{t_0}\}$, в которой каждые две соседние коалиции не пересекаются. Тогда

0) существует такой $j_0 \in N$, что $\mathcal{A}_{j_0} \subset \mathcal{A}_{i_0} \cup \{Q_1\} \setminus \{Q_0\}$;

1) существует такой $j_1 \in N$, что

$$\mathcal{A}_{j_1} \subset \mathcal{A}_{j_0} \cup \{Q_2\} \setminus \{Q_1\} \subset \mathcal{A}_{i_0} \cup \{Q_1\} \setminus \{Q_0\} \cup \{Q_2\} \setminus \{Q_1\} = \mathcal{A}_{i_0} \cup \{Q_2\} \setminus \{Q_0\};$$

...

m) существует такой $j_m \in N$, что

$$\mathcal{A}_{j_m} \subset \mathcal{A}_{j_{m-1}} \cup \{S_{t_0}\} \setminus \{Q_m\} \subset \mathcal{A}_{i_0} \cup \{S_{t_0}\} \setminus \{Q_0\}.$$

Тогда $|\mathcal{C}_{j_m}| < |\mathcal{C}_{i_0}|$, противоречие.

$\square$

Теорема 3.2. *Лексикографически минимаксное решение игры* $(N, \mathcal{A}, c, v)$ *содержится в слабо пропорциональном решении игры* $(N, \mathcal{A}, c, v)$ *для всех*

$c > 0$, всех v : $v(T) > 0$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ слабо перемешана в N.

Доказательство. Сначала докажем достаточность. Пусть $\mathcal{A}$ слабо перемешана и x–лексикографически минимаксное решение игры $(N, \mathcal{A}, c, v)$. Пусть x не является слабо пропорциональным, то есть существуют такие $S, Q \in \mathcal{A}$, что $S \cap Q = \varnothing$ и $\frac{x(Q)}{v(Q)} < \frac{x(S)}{v(S)}$.
Тогда существует такой $i_0 \in S$, что $x_{i_0} > 0$. $\mathcal{A}$ слабо перемешана, значит существует такой $j \in N$, что $\mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}_i \cup \{Q\} \setminus \{S\}$.
Возьмем δ : $0 < \delta < x_{i_0}$, для которого выполняется

$$\forall\, T, P \in \mathcal{A} \qquad \frac{x(T)}{v(T)} < \frac{x(P)}{v(P)} \quad \Rightarrow \quad \frac{x(T)+\delta}{v(T)} < \frac{x(P)-\delta}{v(P)}.$$

Рассмотрим $y = \{y_i\}_{i \in N}$:
$y_{i_0} = x_{i_0} - \delta$,
$y_j = x_j + \delta$,
$y_i = x_i$ в остальных случаях.
Докажем, что существует $P \in \mathcal{A}$, для которого $y(P) < x(P)$, и если $y(T) > x(T)$, то $\frac{y(P)}{v(P)} > \frac{y(T)}{v(T)}$. По Лемме 3.1 это будет означать, что x не принадлежит лексикографически минимаксному решению.
В качестве такого P годится коалиция S. Действительно, $y(S) < x(S)$, поскольку $i_0 \in S$, $j \notin S$. Так как $\mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}_i \cup \{Q\} \setminus \{S\}$, то $y(T) > x(T)$ только если $T = Q$ и $j \in Q$. По выбору δ выполняется $\frac{y(Q)}{v(Q)} < \frac{y(S)}{v(S)}$, следовательно x не принадлежит минимаксному решению.
Получили противоречие, значит наше предположение неверно, x является слабо пропорциональным решением игры $(N, \mathcal{A}, c, v)$.

Теперь докажем необходимость. Предположим, что $\mathcal{A}$ не слабо перемешана. Тогда существуют такие $i_0 \in N$, $Q \in \mathcal{A}_{i_0}$, $S \in \mathcal{A}$, что $Q \cap S = \varnothing$ и

$\mathcal{A}_j \not\subset \mathcal{A}_{i_0} \cup \{S\} \setminus \{Q\}$ для любого $j \in N$.

Пусть $0 < \varepsilon < \frac{1}{|N|}$. Возьмем следующие $c,\ v$:

$c = 1$,

$v(S) = 1$,

$v(T) > 1$ для $T \in \mathcal{A}_{i_0} \setminus \{Q\}$,

$v(T) = \varepsilon$ для остальных $T \in \mathcal{A}$.

Пусть x принадлежит минимаксному и слабо пропорциональному решениям игры $(N, \mathcal{A}, 1, v)$. Существует такой j_0, что $x_{j_0} \geqslant \frac{1}{|N|}$.

Так как x слабо пропорционально и $Q \cap S = \varnothing$, имеем $\frac{x(Q)}{v(Q)} = \frac{x(S)}{v(S)}$. Кроме того, $v(S) + v(Q) > 1$ и $x(S) + x(Q) \leqslant 1$, значит $x(Q) < v(Q) = \varepsilon$.

Тогда $j_0 \notin Q$, значит $j_0 \neq i_0$.

Возьмем $\delta:\ 0 < \delta < \frac{1}{|N|}$, для которого выполняется

$$\frac{x(T)}{v(T)} < \frac{x(P)}{v(P)} \quad \Rightarrow \quad \frac{x(T)+\delta}{v(T)} < \frac{x(P)-\delta}{v(P)} \ \text{ для } \forall\, T, P \in \mathcal{A}. \tag{3.1}$$

Положим $y = \{y_i\}_{i \in N}$:

$y_{i_0} = x_{i_0} + \delta$,

$y_{j_0} = x_{j_0} - \delta$,

$y_i = x_i$ в остальных случаях.

По предположению $\mathcal{A}_j \not\subset \mathcal{A}_{i_0} \cup \{S\} \setminus \{Q\}$ для любого $j \in N$, тогда существует $\bar{P} \in \mathcal{A}_{j_0} \setminus \mathcal{A}_{i_0} \setminus \{S\} \cup \{Q\}$. Так как $j_0 \notin Q$, то $\bar{P} \neq Q$ и значит $i_0 \notin \bar{P}$.

Из $j_0 \in \bar{P},\ i_0 \notin \bar{P}$ следует $y(\bar{P}) < x(\bar{P})$.

В этом случае $v(\bar{P}) = \varepsilon,$ так как $\bar{P} \neq S$, значит

$$\frac{x(\bar{P})}{v(\bar{P})} \geqslant \frac{x_{j_0}}{\varepsilon} > 1.$$

Если $y(T) > x(T)$, то $i_0 \in T,\ j_0 \notin T$.

Тогда либо $T = Q$ и $\frac{x(Q)}{v(Q)} < 1$, либо $v(T) > 1$ и $\frac{x(T)}{v(T)} < 1$.

Получили, что

$$\frac{x(\bar{P})}{v(\bar{P})} > \frac{x(T)}{v(T)}$$

для некоторого $\bar{P} \in \mathcal{A}$, где $y(\bar{P}) < x(\bar{P})$ и любого $T \in \mathcal{A}$ при $y(T) > x(T)$. Ввиду (3.1), по Лемме 3.1, x не принадлежит лексикграфически минимаксному решению, противоречие.

$\square$

Глава 4

Эквивалентность решений

Теорема 4.1. *Пусть $\mathcal{A}$ сильно смешана в N. Тогда для всех $g \in \mathcal{G}$, $c > 0$, $v : \ v(T) > 0$ лексикографически минимаксное решение игры $(N, \mathcal{A}, c, v)$ совпадает с лексикографически максиминным решением и с g-решением игры $(N, \mathcal{A}, c, v)$ и содержится в слабо пропорциональном решении.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ сильно смешана в N, тогда $\mathcal{A}$ слабо перемешана в N и лексикографически минимаксное решение содержится в слабо пропорциональном решении по Теореме 3.2. Так как $\mathcal{A}$ сильно смешана в N, то лексикографически максиминное решение совпадает с g–решением по Теореме 2.8.

Докажем, что лексикографически минимаксное решение совпадает с g–решением.

Пусть $g \in \mathcal{G}$, x принадлежит лексикографически минимаксному решению. Докажем, что $x_i > 0$ влечет

$$\sum_{T \in \mathcal{A}_i} g(x(T)/v(T)) \leqslant \sum_{S \in \mathcal{A}_j} g(x(S)/v(S)) \text{ для } \forall j \in N \setminus \{i\}. \tag{4.1}$$

Предположим, что (4.1) не выполняется для некоторых $i = i_0$, $j = j_0$ и $x_{i_0} > 0$, то есть

$$\sum_{T \in \mathcal{A}_{i_0}} g(x(T)/v(T)) > \sum_{S \in \mathcal{A}_{j_0}} g(x(S)/v(S)). \tag{4.2}$$

Обозначим $M(i) = \{t : \ \mathcal{B}^t \cap \mathcal{A}_i \neq \varnothing\}$.

$|\mathcal{A}_{i_0}| = |\mathcal{A}_{j_0}|$ из сильной смешанности $\mathcal{A}$. Сначала сокращаем в (4.2) общие слагаемые, получаем

$$\sum_{T \in \mathcal{A}_{i_0} \setminus \mathcal{A}_{j_0}} g(x(T)/v(T)) > \sum_{S \in \mathcal{A}_{j_0} \setminus \mathcal{A}_{i_0}} g(x(S)/v(S)).$$

Далее уменьшим пределы суммирования следующим образом: допустим, что существует $\bar{S} \in \mathcal{A}_{j_0} \setminus \mathcal{A}_{i_0}$ и $\bar{T} \in \mathcal{A}_{i_0} \setminus \mathcal{A}_{j_0}$ из одной компоненты связности. Так как элементы всех компонент связности содержатся в разбиении, то $\bar{T}$ единственное для $\bar{T}$.

По уже доказанному $\mathcal{A}$ является слабо перемешанной и, как уже упоминалось, лексикографически минимаксное решение лежит в слабо пропорциональном (по 3.2), тогда

$$\frac{x(\bar{S})}{v(\bar{S})} = \frac{x(\bar{T})}{v(\bar{T})}.$$

Значит, соответствующие слагаемые можно вычеркнуть из своих частей, не портя неравенство 4.2.

Если есть еще $\hat{S} \in \mathcal{A}_{j_0}$ и $\hat{T} \in \mathcal{A}_{i_0}$ из одной компоненты связности, то $\hat{S}$ и $\bar{S}$ из разных компонент связности (так как компоненты связности — подмножества разбиения N). Тогда $\hat{T}$ и $\bar{T}$ не совпадают, аналогично $\hat{S}$ и $\hat{T}$ вычеркиваем из пределов суммирования.

Так мы уменьшаем пределы суммирования, пока не получим

$$\sum_{T \in \mathcal{C}_{i_0}} g(x(T)/v(T)) > \sum_{S \in \mathcal{C}_{j_0}} g(x(S)/v(S)), \tag{4.3}$$

где $\mathcal{C}_{i_0} \subset \mathcal{A}_{i_0} \setminus \mathcal{A}_{j_0}$, $\mathcal{C}_{j_0} \subset \mathcal{A}_{j_0} \setminus \mathcal{A}_{i_0}$, причем $|\mathcal{C}_{i_0}| = |\mathcal{C}_{j_0}|$ и для всех $S \in \mathcal{C}_{j_0}$ выполняется $S \notin \bigcup\limits_{t \in M(i_0)} \mathcal{B}^t$ (то есть для всех $S \in \mathcal{C}_{j_0}$, всех $T \in \mathcal{A}_{i_0}$, коалиции S и T в разных компонентах связности).

Из (4.3) и $|\mathcal{C}_{i_0}| = |\mathcal{C}_{j_0}|$ следует, что существуют $Q \in \mathcal{C}_{i_0}$ и $P \in \mathcal{C}_{j_0}$, такие, что $\frac{x(Q)}{v(Q)} > \frac{x(P)}{v(P)}$.

$\mathcal{A}$ сильно смешана в N, следовательно (из условия 5 определения сильной смешанности и условия $S \notin \bigcup\limits_{t \in M(i_0)} \mathcal{B}^t$) существует $j_1 \in \bigcap\limits_{T \in \mathcal{A}_{i_0} \cup \{P\} \setminus \{Q\}} T$.

Возьмем $0 < \delta \leqslant x_{i_0}$, для которого

$$\frac{x(Q) - \delta}{v(Q)} > \frac{x(P) + \delta}{v(P)}.$$

Положим $y = \{y_i\}_{i \in N}$:

$y_{i_0} = x_{i_0} - \delta$,

$y_{j_1} = x_{j_1} + \delta$,

$y_i = x_i$ в остальных случаях.

Тогда

$$\frac{x(P)}{v(P)} < \frac{y(P)}{y(P)} < \frac{y(Q)}{y(Q)} < \frac{x(Q)}{v(Q)}$$

и $x(T) = y(T)$ для всех $T \in \mathcal{A} \setminus \{P, Q\}$, но по Лемме 3.1 это противоречит тому, что x–минимаксное решение.

Таким образом, $x_i > 0$ влечет (4.1) и, в силу Свойства 2, x принадлежит g-решению игры $(N, \mathcal{A}, c, v)$.

Поскольку g-решение и минимаксное решение определяются набором $\{x(T)\}_{T \in \mathcal{A}}$, они совпадают.

$\square$

Глава 5

Примеры

В статье [10] для $|N| \leqslant 6$ перечислены все системы коалиций, для которых существует слабо пропорциональное решение. Для каждой допустимой системы коалиций определяется, будет ли она сильно смешанной, слабо смешанной или слабо перемешанной.

5.1. Минимальное покрытие

Если $\mathcal{A}$ —минимальное покрытие N, то у каждой коалиции есть «фанатик» – игрок, который содержится только в этой коалиции. Тогда лексикографически минимаксное решение пропорционально.

Однако лексикографически максиминное решение в этом случае не является даже слабо пропорциональным.

Пример.

$|N| = 5$ и $\mathcal{A} = \{\{1,2\},\ \{4,5\},\ \{1,3\}\}$.

Тогда $\mathcal{A}$ не является слабо смешанной.

Допустим, что $\mathcal{A}$ слабо смешана.

Пусть $i = 1$. $\mathcal{A}_1 = \{\{1,2\},\ \{1,3\}\}$.

Возьмем $Q = \{1,2\},\ S = \{4,5\},\ Q \cap S = \varnothing$.

Тогда должен существовать такой $j \in N$, что

$$\mathcal{A}_j \supset \mathcal{A}_1 \cup \{S\} \setminus \{Q\} = \{\{1,3\},\ \{4,5\}\}.$$

Но такое включение невозможно.

5.2. Системы коалиций для $|N| = 4, 5$

1. $|N| = 4$ и $\mathcal{A} = \{\{i, j\},\ \{k, \ell\};\ \{i, k\},\ \{j, \ell\}\}$,

   $\mathcal{A}$ сильно смешана, решения эквивалентны и совпадают со слабо пропорциональным.

2. $|N| = 5$ и $\mathcal{A} = \{\{i, j\},\ \{k, \ell, m\};\ \{i, k\},\ \{j, \ell\}\}$,

   $\mathcal{A}$ слабо смешана, то есть лексикографически максиминное решение содержится в слабо пропорциональном, а лексикографически минимаксное нет.

   Условие слабой перемешанности не выполняется:

   $$\text{Возьмем} \quad \mathcal{A}_m = \{\{k, \ell, m\}\}, \quad Q = \{k, \ell, m\}, \quad S = \{i, j\}.$$

   $$\text{Тогда} \quad \mathcal{A}_m \cup \{S\} \setminus \{Q\} = \{\{i, j\}\}.$$

   Не существует такого $p \in \{i, j, k, \ell, m\}$, что $\mathcal{A}_p \subset \{\{i, j\}\}$.

3. $|N| = 5$ и $\mathcal{A} = \{\{i, j\},\ \{k, \ell, m\};\ \{i, k\},\ \{j, \ell, m\}\}$,

   $\mathcal{A}$ сильно смешана, решения эквивалентны и совпадают со слабо пропорциональным.

5.3. Системы коалиций для $|N| = 6$

$|N| = 6$, $N = \{i, j, k, \ell, m, n\}$ и $\mathcal{A}$ дает одну из 13 описанных ниже систем коалиций с компонентами связности $\mathcal{B}_i$ графа $G(\mathcal{A})$:

1. $\mathcal{B}_1 = \{\{i, j\},\ \{k, \ell, m, n\}\}$, $\mathcal{B}_2 = \{\{i, k\},\ \{j, \ell\}\}$,

   $\mathcal{A}$ слабо смешана, то есть лексикографически максиминное решение содержится в слабо пропорциональном, а лексикографически минимаксное нет.

Условие слабой перемешанности не выполняется:

$$\text{Возьмем}\quad \mathcal{A}_m = \{\{k, \ell, m, n\}\}, \quad Q = \{k, \ell, m, n\}, \quad S = \{i, j\}.$$

$$\text{Тогда}\quad \mathcal{A}_m \cup \{S\} \setminus \{Q\} = \{\{i, j\}\}.$$

Не существует такого $p \in N$, что $\mathcal{A}_p \subset \{\{i, j\}\}$.

2. $\mathcal{B}_1 = \{\{i, j\},\ \{k, \ell, m, n\}\},\ \mathcal{B}_2 = \{\{i, k\},\ \{j, \ell, n\}\},$

   $\mathcal{A}$ слабо смешана, то есть лексикографически максиминное решение содержится в слабо пропорциональном, а лексикографически минимаксное нет.

   Условие слабой перемешанности не выполняется:

$$\text{Возьмем}\quad \mathcal{A}_m = \{\{k, \ell, m, n\}\}, \quad Q = \{k, \ell, m, n\}, \quad S = \{i, j\}.$$

$$\text{Тогда}\quad \mathcal{A}_m \cup \{S\} \setminus \{Q\} = \{\{i, j\}\}.$$

   Не существует такого $p \in N$, что $\mathcal{A}_p \subset \{\{i, j\}\}$.

3. $\mathcal{B}_1 = \{\{i, j\},\ \{k, \ell, m, n\}\},\ \mathcal{B}_2 = \{\{i, k, m\},\ \{j, \ell, n\}\},$

   $\mathcal{A}$ сильно смешана, решения эквивалентны и совпадают со слабо пропорциональным.

4. $\mathcal{B}_1 = \{\{i, j\},\ \{k, \ell, m, n\}\},\ \mathcal{B}_2 = \{\{i, k\},\ \{j, \ell, m, n\}\},$

   $\mathcal{A}$ сильно смешана, решения эквивалентны и совпадают со слабо пропорциональным.

5. $\mathcal{B}_1 = \{\{i, j, k\},\ \{\ell, m, n\}\},\ \mathcal{B}_2 = \{\{i, j, \ell\},\ \{k, m, n\}\},$

   $\mathcal{A}$ сильно смешана, решения эквивалентны и совпадают со слабо пропорциональным.

6. $\mathcal{B}_1 = \{\{i,j\},\ \{k,\ell\}\}$, $\mathcal{B}_2 = \{\{i,k\},\ \{j,\ell\}\}$, $\mathcal{B}_3 = \{\{i,\ell,n\},\ \{m,j,k\}\}$, $\mathcal{A}$ слабо перемешана, то есть лексикографически минимаксное решение содержится в слабо пропорциональном, а лексикографически максиминное нет.

   Условие С3 слабой смешанности не выполняется:

   $$\text{Возьмем}\quad \mathcal{A}_i = \{\{i,j\},\ \{i,k\},\ \{i,\ell,n\}\},\quad Q = \{i,j\},\quad S = \{k,\ell\}.$$

   $$\text{Тогда}\quad \mathcal{A}_i \cup \{S\} \setminus \{Q\} = \{\{i,k\},\ \{i,\ell,n\},\ \{k,\ell\}\}.$$

   Не существует такого $p \in N$, что $\mathcal{A}_p \supset \{\{i,k\},\ \{i,\ell,n\},\ \{k,\ell\}\}$.

7. $\mathcal{B}_1 = \{\{i,j\},\ \{k,\ell\},\ \{m,n\}\}$, $\mathcal{B}_2 = \{\{i,k,m\},\ \{j,\ell,n\}\}$, $\mathcal{A}$ сильно смешана, решения эквивалентны и совпадают со слабо пропорциональным.

8. $\mathcal{B}_1 = \{\{i,j\},\ \{k,\ell\},\ \{i,m\}\}$, $\mathcal{B}_2 = \{\{i,k,n\},\ \{j,\ell,m\}\}$, И лексикографически максиминное, и лексикографически минимаксное решения не содержатся в слабо пропорциональном.

   Условие С3 слабой смешанности не выполняется:

   $$\text{Возьмем}\quad \mathcal{A}_i = \{\{i,j\},\ \{i,m\},\ \{i,k,n\}\},\quad Q = \{i,j\},\quad S = \{k,\ell\}.$$

   $$\text{Тогда}\quad \mathcal{A}_i \cup \{S\} \setminus \{Q\} = \{\{i,m\},\ \{i,k,n\},\ \{k,\ell\}\}.$$

   Не существует такого $p \in N$, что $\mathcal{A}_p \supset \{\{i,m\},\ \{i,k,n\},\ \{k,\ell\}\}$.

   Условие слабой перемешанности не выполняется:

   $$\text{Возьмем}\quad \mathcal{A}_n = \{\{i,k,n\}\},\quad Q = \{i,k,n\},\quad S = \{j,\ell,m\}.$$

   $$\text{Тогда}\quad \mathcal{A}_n \cup \{S\} \setminus \{Q\} = \{\{j,\ell,m\}\}.$$

   Не существует такого $p \in N$, что $\mathcal{A}_p \subset \{\{j,\ell,m\}\}$.

9. $\mathcal{B}_1 = \{\{i,j\},\ \{k,\ell\},\ \mathcal{B}_2 = \{\{i,k,n\},\ \{j,\ell,m\}\},$

   $\mathcal{A}$ смешана, лексикографически максиминное и лексикографически минимаксное решения содержатся в слабо пропорциональном.

10. $\mathcal{B}_1 = \{\{i,j\},\ \{k,\ell\}\},\ \mathcal{B}_2 = \{\{i,k,n\},\ \{j,\ell,m\}\},\ \mathcal{B}_3 = \{\{i,k,m\},\ \{j,\ell,n\}\},$

    И лексикографически максиминное, и лексикографически минимаксное решения не содержатся в слабо пропорциональном.

    Условие С3 слабой смешанности не выполняется:

    Возьмем $\quad \mathcal{A}_i = \{\{i,j\},\ \{i,k,n\},\ \{i,k,m\}\}, \quad Q = \{i,k,n\}, \quad S = \{j,\ell,n\}.$

    $$\text{Тогда} \quad \mathcal{A}_i \cup \{S\} \setminus \{Q\} = \{\{i,j\},\ \{j,\ell,n\},\ \{i,k,m\}\}.$$

    Не существует такого $p \in N$, что $\mathcal{A}_p \supset \{\{i,j\},\ \{j,\ell,n\},\ \{i,k,m\}\}$.

    Условие слабой перемешанности не выполняется:

    Возьмем $\quad \mathcal{A}_n = \{\{i,k,n\},\ \{j,\ell,n\}\}, \quad Q = \{i,k,n\}, \quad S = \{j,\ell,m\}.$

    $$\text{Тогда} \quad \mathcal{A}_n \cup \{S\} \setminus \{Q\} = \{\{j,\ell,n\},\ \{j,\ell,m\}\}.$$

    Не существует такого $p \in N$, что $\mathcal{A}_p \subset \{\{j,\ell,n\},\ \{j,\ell,m\}\}$.

11. $\mathcal{B}_1 = \{\{k,\ell,n\},\ \{i,j\},\ \{k,\ell,m\}\},\ \mathcal{B}_2 = \{\{i,k\},\ \{j,\ell\}\},$

    И лексикографически максиминное, и лексикографически минимаксное решения не содержатся в слабо пропорциональном.

    Условие С3 слабой смешанности не выполняется:

    Возьмем $\quad \mathcal{A}_k = \{\{k,\ell,n\},\ \{k,\ell,m\},\ \{i,k\}\}, \quad Q = \{k,\ell,n\}, \quad S = \{i,j\}.$

    $$\text{Тогда} \quad \mathcal{A}_k \cup \{S\} \setminus \{Q\} = \{\{i,j\},\ \{k,\ell,m\},\ \{i,k\}\}.$$

    Не существует такого $p \in N$, что $\mathcal{A}_p \supset \{\{i,j\},\ \{k,\ell,m\},\ \{i,k\}\}$.

Условие слабой перемешанности не выполняется:

$$\text{Возьмем}\quad \mathcal{A}_n = \{\{k, \ell, n\}\}, \quad Q = \{k, \ell, n\}, \quad S = \{i, j\}.$$

$$\text{Тогда}\quad \mathcal{A}_n \cup \{S\} \setminus \{Q\} = \{\{i, j\}\}.$$

Не существует такого $p \in N$, что $\mathcal{A}_p \subset \{\{i, j\}\}$.

12. $\mathcal{B}_1 = \{\{i, j\},\ \{k, \ell, m\}\},\ \mathcal{B}_2 = \{\{i, k, n\},\ \{j, \ell\}\}$,

$\mathcal{A}$ слабо смешана, то есть лексикографически максиминное решение содержится в слабо пропорциональном, а лексикографически минимаксное нет.

Условие слабой перемешанности не выполняется:

$$\text{Возьмем}\quad \mathcal{A}_m = \{\{k, \ell, m\}\}, \quad Q = \{k, \ell, m\}, \quad S = \{i, j\}.$$

$$\text{Тогда}\quad \mathcal{A}_m \cup \{S\} \setminus \{Q\} = \{\{i, j\}\}.$$

Не существует такого $p \in N$, что $\mathcal{A}_p \subset \{\{i, j\}\}$.

13. $\mathcal{B}_1 = \{\{i, j\},\ \{k, \ell, m\}\},\ \mathcal{B}_2 = \{\{i, k, n\},\ \{j, \ell, m\}\}$,

$\mathcal{A}$ слабо смешана, то есть лексикографически максиминное решение содержится в слабо пропорциональном, а лексикографически минимаксное нет.

Условие слабой перемешанности не выполняется:

$$\text{Возьмем}\quad \mathcal{A}_n = \{\{i, k, n\}\}, \quad Q = \{i, k, n\}, \quad S = \{j, \ell, m\}.$$

$$\text{Тогда}\quad \mathcal{A}_n \cup \{S\} \setminus \{Q\} = \{\{j, \ell, m\}\}.$$

Не существует такого $p \in N$, что $\mathcal{A}_p \subset \{\{j, \ell, m\}\}$.

Заключение

В данной работе дан обзор результатов, касающихся селекторов пропорционального и слабо пропорционального решений, а именно: лексикографически максиминного, лексикографически минимаксного и g–решений.

Результаты, касающиеся лексикографически минимаксного решения, являются новыми. Получены условия включения лексикографически минимаксного решения в пропорциональное и слабо пропорцинальное, а также условия эквивалентности с другими рассматриваемыми решениями.

Несмотря на внешнее сходство лексикографически минимаксного и лексикографически максиминного решений, условия их пропорциональности и слабой пропорциональности не аналогичны.

Кроме того, при $|N| \leqslant 6$ рассмотрены все наборы коалиций, для которых слабо пропорциональное решение непусто. Для каждого набора указано, являются ли лексикографически минимаксные и лексикографически максиминные решения слабо пропорцинальными.

Список литературы

1. Нейман Д. Ф., Моргенштейн О. Теория игр и экономическое поведение. — Москва : Наука, 1970.
2. Naumova N. I. Claim problems with coalition demands. // Contributions to Game Theory and Management. — 2010. — P. 311–326.
3. Naumova N. I. Generalized proportional solutions to games with restricted cooperation. // Contributions to Game Theory and Management. — 2011. — Vol. 5. — P. 230–242.
4. Naumova N. I. Generalized nucleoli and generalized bargaining sets for games with restricted cooperation // Recent Advances in Game Theory and Applications. European Meeting on Game Theory, Saint Petersburg, Russia, 2015, and Networking Games and Management, Petrozavodsk, Russia, 2015 / Ed. by L. A. Petrosyan, V. V. Mazalov. — Birkhäuser, 2016. — P. 165–183.
5. Schmeidler D. The nucleolus of a characteristic function game. // SIAM Journal on applied Mathematics. — 1969. — Vol. 17, no. 6. — P. 1163–1170.
6. Вилков В. Б. N–ядро в кооперативных играх без побочных платежей. // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1974. — Т. 14, № 5. — С. 1327–1331.
7. Yanovskaya E. Consistency for proportional solutions. // International Game Theory Review. — 2002. — no. 4. — P. 343–356.
8. Брегман Л. М., Романовский И. В. Разверстка и оптимизация в задачах распределения. // Исследование операций и статистическое моделирование. — Ленинград : Издательство Ленинградского университета (ЛГУ), 1975. — С. 137–162.
9. Naumova N. I. Generalized proportional solutions // Advances in Eco-

nomics and Optimization / Ed. by D. Wing-Kay Yeung et al. — Nova Science Publishers, 2014. — P. 123–143.

10. Наумова Н. И., Васильченко Л. С. Допустимые системы коалиций в задачах распределения. // Леонид Витальевич Канторович: математика, менеджмент, информатика / Под ред. Г. А. Леонова, В. С. Катькало, А. В. Бухвалова. — СПб. : Издательство «Высшая школа менджмента», 2010. — С. 141–158.